Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 3$.

[Dejm McK]

Thm : Définissons $\begin{cases} X_0 = 0 \\ X_{n+1} = X_n + \xi_n \end{cases}$ avec ξ_n v.a. iid de loi uniforme sur $\{\pm e_1, \dots, \pm e_d\}$, $d \geq 3$.

$$\mathbb{P}(\|X_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty) = 1.$$

Posons pour $t \in \mathbb{R}^d$, $\varphi(t) = \varphi_{\xi_n}(t)$

$$= \mathbb{E}(e^{i\langle t, \xi_n\rangle}) = \frac{1}{2d}\sum_{k=1}^{d}(e^{it_k} + e^{-it_k}) = \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d}\cos(t_k).$$

Par indépendance $\varphi_{X_n}(t) = (\varphi(t))^n$

$$= \mathbb{E}(e^{i\langle t, X_n\rangle}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\mathbb{P}(X_n = k)e^{ikt} \quad \text{par transfert.}$$

Puisque $\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{T^d}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}|\mathbb{P}(X_n=k)e^{itk}|\,dt = 1$ où $T = [-\pi,\pi]$, par Fubini :

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{T^d}\varphi_{X_n} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\left(\frac{\mathbb{P}(X_n=k)}{(2\pi)^d}\int_{T^d}e^{i\langle t,k\rangle}dt\right) = \mathbb{P}(X_n = 0).$$

Par Fubini-Tonelli, $\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}(X_{2n}=0) = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{T^d}\varphi(t)^{2n}\,dt = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{T^d}\frac{dt}{1-\varphi(t)^2}$

car $|\varphi(t)| < 1$ pp $[|\varphi(t)| = 1 \Leftrightarrow t = 0$ ou $t = (\pm\pi, \dots, \pm\pi)]$.

Puisque φ est continue sur T_d et $\cos(x\pm\pi) = -\cos x$, il suffit de vérifier l'intégrabilité au voisinage de 0.

$\varphi(t) = \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d}(1 - \frac{t_k^2}{2} + o(t_k^2)) = 1 - \frac{\|t\|_2^2}{2d} + o(\|t\|_2^2)$ donc $\frac{1}{1-\varphi(t)^2} \sim \frac{d}{\|t\|_2^2}$ intégrable en 0 car $2 < d$.

Puisque $X_0 = 0$, il faut un nb de pas pair pour revenir en 0 : $\mathbb{P}(X_{2n+1} = 0) = 0$.

Donc (Fubini) puisque $\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X_{2n}=0) < \infty$, $\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X_n = 0) < \infty$.

· Si $k\in\mathbb{Z}^d$, notons $N_k = \#\{n\geq 0, X_n = k\} = \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{1}_{X_n=k}$.

[Par Borel-Cantelli, N_0 est fini p.s] : $\mathbb{E}(N_0) = \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X_n=0) < \infty$ donc N_0 fini p.s

Si $k\in\mathbb{Z}^d$, posons $\ell = \sum_{j=1}^{d}|k_j|$ le nombre de pas nécessaires de 0 à k.

Ainsi, $\mathbb{P}(X_\ell = -k) > 0$ et pour $n \geq \ell$.

$$\mathbb{P}(X_n = 0) \geq \mathbb{P}(X_n = 0 \text{ et } X_{n-\ell} = k)$$
$$\geq \mathbb{P}(X_{n-\ell} = k \text{ et } \xi_{n-\ell+1} + \dots + \xi_n = -k) = \mathbb{P}(X_{n-\ell}=k)\mathbb{P}(X_\ell = -k) \quad \text{par iid.}$$

Donc $\sum_{n=\ell}^{+\infty}\mathbb{P}(X_{n-\ell}=k) \leq \frac{1}{\mathbb{P}(X_\ell=-k)}\sum_{n=\ell}^{+\infty}\mathbb{P}(X_n=0) < \infty$.

Donc par Borel-Cantelli à nouveau, N_k est fini p.s

$$\mathbb{P}(\|X_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty) = \mathbb{P}(\forall A\in\mathbb{N}, \exists N\in\mathbb{N}, \forall n\geq N, \|X_n\|\geq A)$$
$$= \lim_{A\to+\infty}\mathbb{P}(\exists N\in\mathbb{N}, \forall n\geq N, \|X_n\|\geq A) \quad \text{par limite monotone}$$
$$= \lim_{A\to+\infty}(\forall k\in\mathbb{Z}^d, \|k\|\leq A \Rightarrow N_k \text{ fini}) = 1$$